MINISTERUL EDUCAȚIEI
ȘI CERCETĂRII

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE
DIN ROMÂNIA

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Botoşani, 2 aprilie 2025

CLASA a XII-a – soluţii şi bareme

Problema 1. *Spunem că inelul $(A,+,\cdot)$ are proprietatea (P) dacă*

$$(P) \qquad \begin{cases} \textit{mulţimea } A \textit{ are cel puţin } 4 \textit{ elemente,} \\ \textit{elementul } 1+1 \in A \textit{ este inversabil,} \\ x + x^4 = x^2 + x^3, \textit{ pentru orice } x \in A. \end{cases}$$

a) *Demonstraţi că dacă un inel $(A,+,\cdot)$ are proprietatea (P), iar $a,b \in A$ sunt elemente distincte, astfel încât a şi $a+b$ sunt inversabile, atunci b nu este inversabil, iar $1+ab$ este inversabil.*
b) *Daţi un exemplu de inel care are proprietatea (P).*

Soluţie.
Fie $U(A)$ mulţimea elementelor inversabile din inelul A. Pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, şi $x \in A$, notăm $kx = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{k \text{ termeni}}$. În particular, notăm $k \cdot 1 = k$. Conform ipotezei, $2 \in U(A)$. De asemenea, notăm cu (1) egalitatea din ipoteză $x + x^4 = x^2 + x^3$ pentru orice $x \in A$.
Substituind x cu $-x$ în (1) obţinem

$$-x + x^4 = x^2 - x^3\,, \quad \text{pentru orice } x \in A. \quad (2)$$

Scăzând relaţiile (1) şi (2) obţinem atunci $2x = 2x^3$, de unde, cum $2 \in U(A)$, obţinem

$$x = x^3\,, \quad \text{pentru orice } x \in A. \quad (3)$$

....**1p**
Pentru $x \in U(A)$, înmulţind (2) cu x^{-1} obţinem

$$x^2 = 1\,, \quad \text{pentru orice } x \in U(A). \quad (4)$$

Ca mulţime a elementelor inversabile în monoidul $(A,\cdot)$, $U(A)$ este un grup. Un grup în care $x^2 = 1$ pentru orice element este comutativ, astfel că $(U(A),\cdot)$ este comutativ. **1p**
Relaţia (4) ne dă pentru $x = 2 \in U(A)$ că $4 = 1$, deci $3 = 0$, astfel că inelul

A are caracteristica 3. .... **1p**
Fie $a, b \in A$, cu proprietatea că $a \neq b$ şi $a, a+b \in U(A)$. Dacă presupunem că $b \in U(A)$, atunci

$$2ab = (a+b)^2 - a^2 - b^2 = 1 - 1 - 1 = -1 = 2\,,$$

astfel că $ab = 1 = a^2$ şi înmulţind cu inversul elementului a am obţine $a = b$, contrazicând ipoteza că $a \neq b$. Prin urmare, $b \notin U(A)$. **1p**
De asemenea,

$$1 + ab = a^2 + ab = a(a+b) \in U(A)\,,$$

ca produs de elemente inversabile. **1p**
b) Fie $A = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, cu adunarea şi înmulţirea definite pe componente:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)\,, \quad (a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)\,,$$

pentru orice $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_3$. A este atunci un inel cu 9 elemente, cu elementul unitate $1 = (\hat{1}, \hat{1})$, şi cu $1 + 1 = (\hat{2}, \hat{2}) \in U(A)$. De asemenea, $x^3 = x$ pentru orice $x \in A$, astfel că $x^4 = x^2$ şi $x + x^4 = x^2 + x^3$ pentru orice $x \in A$. Inelul A are deci proprietatea (P). **2p**

Problema 2. *Fie $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă, cu derivata o funcţie integrabilă pe $[0, 1]$ şi $f(1) = 0$. Arătaţi că*

$$\int_0^1 (xf'(x))^2\,dx \geq 12 \cdot \left(\int_0^1 xf(x)\,dx\right)^2 .$$

Soluţie.
Fie $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funcţia definită prin $g(x) = xf(x)$ pentru orice $x \in [0, 1]$. Avem atunci că $g(0) = 0 = g(1)$ şi $g'(x) = f(x) + xf'(x)$, astfel că

$$\int_0^1 x^2 (f'(x))^2\,dx = \int_0^1 (g'(x) - f(x))^2\,dx =$$

$$= \int_0^1 (g'(x))^2\,dx - 2\int_0^1 g'(x)f(x)\,dx + \int_0^1 (f(x))^2\,dx =$$

$$= \int_0^1 f^2(x)\,dx + \int_0^1 (g'(x))^2\,dx - 2(f(1)g(1) - f(0)g(0)) + 2\int_0^1 g(x)f'(x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 f^2(x)\,dx + \int_0^1 (g'(x))^2\,dx + \int_0^1 x\cdot(2f(x)f'(x))\,dx =$$

$$= \int_0^1 f^2(x)\,dx + \int_0^1 (g'(x))^2\,dx + \int_0^1 x\cdot(f^2(x))'\,dx =$$

$$= \int_0^1 f^2(x)\,dx + \int_0^1 (g'(x))^2\,dx + (1\cdot f^2(1) - 0\cdot f^2(0)) - \int_0^1 f^2(x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 f^2(x)\,dx + \int_0^1 (g'(x))^2\,dx - \int_0^1 f^2(x)\,dx = \int_0^1 (g'(x))^2\,dx.$$

....**3p**

Cu varianta integrală a inegalităţii Cauchy-Buniakowski-Schwarz avem atunci

$$\left(\int_0^1 (2x-1)\cdot g'(x)\,dx\right)^2 \leq \int_0^1 (2x-1)^2\,dx \cdot \int_0^1 (g'(x))^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot((2\cdot 1-1)^3 - (2\cdot 0-1)^3)\cdot \int_0^1 x^2(f'(x))^2\,dx = \frac{1}{3}\cdot \int_0^1 x^2(f'(x))^2\,dx.$$

....**2p**

Rezultă atunci că

$$\int_0^1 (xf'(x))^2\,dx \geq 3\cdot\left(\int_0^1 (2x-1)\cdot g'(x)\,dx\right)^2 =$$

$$= 3\cdot\left((2\cdot 1-1)g(1) - (2\cdot 0-1)g(0) - 2\int_0^1 g(x)\,dx\right)^2 = 12\cdot\left(\int_0^1 xf(x)\,dx\right)^2,$$

ceea ce trebuia arătat...**2p**

Problema 3. a) *Fie $a\in\mathbb{R}$ şi $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$, care admite o primitivă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, pentru care $F(x)+a\cdot f(x)\geq 0$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ şi $\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{F(x)}{e^{|\alpha\cdot x|}}=0$ pentru orice $\alpha\in\mathbb{R}^*$. Arătaţi că $F(x)\geq 0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.*

b) *Fie $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $g=X^n+a_1X^{n-1}+\ldots+a_{n-1}X+a_n\in\mathbb{R}[X]$ un polinom cu toate rădăcinile reale şi $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcţie polinomială cu proprietatea că $f(x)+a_1\cdot f'(x)+a_2\cdot f^{(2)}(x)+\ldots+a_n\cdot f^{(n)}(x)\geq 0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Arătaţi că $f(x)\geq 0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.*

Soluţie.

a) Pentru $a = 0$ afirmaţia este evident adevărată. Considerăm în continuare $a \neq 0$ şi fie $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funcţia definită prin $g(x) = F(x) \cdot e^{\frac{x}{a}}$. Funcţia g este derivabilă, ca produs de funcţii derivabile, cu

$$g'(x) = f(x) \cdot e^{\frac{x}{a}} + \frac{1}{a} \cdot F(x) \cdot e^{\frac{x}{a}} = \frac{1}{a} \cdot e^{\frac{x}{a}} \cdot (F(x) + a \cdot f(x)) \,.$$

Pentru $a > 0$ rezultă că $g'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, astfel că funcţia g este crescătoare. Cum

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} F(x) \cdot e^{\frac{x}{a}} = 0 \,,$$

rezultă că $g(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, astfel că $F(x) = g(x) \cdot e^{-\frac{x}{a}} \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Pentru $a < 0$, $g'(x) \leq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, astfel că funcţia g este descrescătoare, iar cum

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} F(x) \cdot e^{\frac{x}{a}} = 0 \,,$$

rezultă că $g(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă că $F(x) = g(x) \cdot e^{-\frac{x}{a}} \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. **3p**

b) Fie $\mathcal{P} = \{f | \, f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f -$ funcţie polinomială$\}$. Pentru fiecare număr real a considerăm funcţia $T_a : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$, definită prin $T_a(f) = f + a \cdot f'$, i.e. $T_a(f)(x) = f(x) + a \cdot f'(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Deoarece pentru orice $f \in \mathcal{P}$ şi orice $\alpha \in \mathbb{R}$ avem $\lim\limits_{|x| \to \infty} \dfrac{f(x)}{e^{|\alpha \cdot x|}} = 0$, atunci conform punctului a), pentru orice număr real a are loc implicaţia

$$f \in \ \mathcal{P} : \ T_a(f)(x) \geq 0, \, \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow f(x) \geq 0, \, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Fie $r_1, r_2, \ldots, r_n$ rădăcinile polinomului g, iar $s_k = -r_k$ pentru $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ opusele lor, astfel că

$$g = (X - r_1)(X - r_2) \ldots (X - r_n) = (X + s_1)(X + s_2) \ldots (X + s_n).$$

.... **1p**

Cu relaţiile lui Viète avem atunci expresiile coeficienţilor polinomului g:

$$a_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_k} \,, \quad \text{pentru orice } k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Pentru orice $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ şi orice funcţie $f \in \mathcal{P}$ avem

$$(T_{s_m} \circ \cdots \circ T_{s_2} \circ T_{s_1})(f) = f + \left(\sum_{i=1}^{m} s_i\right) f' + \left(\sum_{1 \le i_1 < i_2 \le m} s_{i_1} s_{i_2}\right) f'' + \ldots$$

$$\cdots + \left(\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le m} s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_k}\right) f^{(k)} + \cdots + (s_1 s_2 \ldots s_m) f^{(m)}. \quad (Q(m))$$

Afirmaţia $Q(m)$ rezultă prin inducţie după m:
Pentru $m = 1$ avem $T_{s_1}(f) = f + s_1 \cdot f'$ şi $Q(1)$ este adevărată.
Presupunând pentru un $m \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ afirmaţia $Q(m)$ adevărată, avem

$$(T_{s_{m+1}} \circ T_{s_m} \circ \ldots T_{s_2} \circ T_{s_1})(f) = T_{s_{m+1}}(T_m \circ \cdots \circ T_{s_1})(f) =$$

$$= T_{s_{m+1}} \left(\sum_{J \subseteq \{1,2,\ldots,m\}} \left(\prod_{j \in J} s_j \right) f^{(|J|)} \right) =$$

$$= \left(\sum_{J \subseteq \{1,2,\ldots,m\}} \left(\prod_{j \in J} s_j \right) f^{(|J|)} \right) + s_{m+1} \cdot \left(\sum_{J \subseteq \{1,2,\ldots,m\}} \left(\prod_{j \in J} s_j \right) f^{(|J|)} \right)' =$$

$$= \sum_{J_1 \subseteq \{1,2,\ldots,m,m+1\}} \left(\prod_{j \in J_1} s_j \right) f^{(|J_1|)}$$

şi $Q(m+1)$ este de asemenea adevărată.
Prin urmare, $Q(m)$ este adevărată pentru orice $M \in \{1, 2, \ldots, n\}$........**1p**
Din $Q(n)$ avem

$$(T_{s_n} \circ \cdots \circ T_{s_2} \circ T_{s_1})(f) = f + a_1 \cdot f' + a_2 \cdot f'' + \cdots + a_n \cdot f^{(n)}.$$

Conform ipotezei, avem atunci că

$$(T_{s_n} \circ \cdots \circ T_{s_2} \circ T_{s_1})(f)(x) = f(x) + a_1 \cdot f'(x) + a_2 \cdot f''(x) + \cdots + a_n \cdot f^{(n)}(x) \ge 0$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
Aplicând succesiv proprietatea de la a), obţinem că pentru orice $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$(T_{s_m} \circ \cdots \circ T_{s_2} \circ T_{s_1})(f)(x) \ge 0 \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

În particular, obţinem $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. **2p**

Problema 4. *Fie p un număr prim, $p \geq 3$, iar k un număr impar nedivizibil cu p. Fie K un corp finit cu $kp+1$ elemente şi $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$, mulţimea elementelor din $K^* = K \setminus \{0\}$ care nu au ordinul k în grupul multiplicativ $(K^*, \cdot)$. Arătaţi că polinomul $P(X) = (X + x_1)(X + x_2) \ldots (X + x_t)$ are cel puţin p coeficienţi egali cu 1.*

Soluţie.

Deoarece k şi p sunt impare, $|K|$ este par, deci o putere a lui 2, iar caracteristica corpului K este 2. Rezultă atunci că $x_1, x_2, \ldots, x_t$ sunt rădăcinile polinomului P. Fie $P = \sum\limits_{i=0}^{t} a_j X^j$.

Grupul multiplicativ $(K^*, \cdot)$ este ciclic de ordin kp şi fie $a \in K^*$ un generator al grupului. Pentru orice $s \in \{1, 2, \ldots, kp\}$, cu $(s, kp) = 1$ avem atunci

$$ord(a^s) = ord(a) = kp\,. \qquad (1)$$

În particular, pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ avem că $(ik+p, k) = (p, k) = 1$ şi $(ik+p, p) = (ik, p) = 1$, astfel că $(ik+p, kp) = 1$ şi $ord(a^{ik+p}) = kp$. Rezultă că

$$P\left(a^{ik+p}\right) = 0\,, \quad \text{pentru orice } i \in \{1, 2, \ldots, p-1\}. \qquad (2)$$

. . . . **1p**

Pentru $r \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ considerăm suma $A_r = \sum\limits_{i=0}^{p-1} a^{-irk} P(a^{ik+p})$. Ţinând cont de (2), rezultă că $A_r = P(a^p)$, şi cum $ord(a^p) = k$, a^p nu este rădăcină a lui P şi $A_r \neq 0$. (3) **1p**

De asemenea,

$$A_r = \sum_{i=0}^{p-1} a^{-irk} P(a^{ik+p}) = \sum_{i=0}^{p-1} a^{-irk} \sum_{j=0}^{t} a_j a^{ikj+pj} =$$

$$= \sum_{j=0}^{t} a_j a^{pj} \sum_{i=0}^{p-1} a^{k(j-r)i}.$$

Deoarece

$$\sum_{i=0}^{p-1} a^{kmi} = \begin{cases} p & , \text{ dacă } p|m; \\ 0 & , \text{ dacă } p \not| m, \end{cases}$$

obţinem

$$A_r = \sum_{j=0}^{t} a_j a^{pj} \sum_{i=0}^{p-1} a^{k(j-r)i} = p \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-r}{p} \rfloor} a_{pj+r} a^{p(pj+r)}.$$

Cum $A_r \neq 0$, cel puţin unul dintre coeficienţii a_r, a_{p+r}, a_{2p+r}, $\ldots$ este nenul. Pentru fiecare $r \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ există cel puţin un coeficient nenul de forma a_{pj+r}. **2p**

Pentru fiecare divizor $d|kp$ considerăm mulţimea $U_d = \{x \in K^* |\, ord(x) = d\}$ a elementelor de ordin d din grupul multiplicativ $(K^*, \cdot)$ şi polinomul

$$Q_d = \prod_{x \in U_d} (X + x).$$

Fie $K_2 = \{0, 1\}$ subcorpul prim al corpului K şi $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_n = kp$ divizorii lui kp. Cum $Q_1 = X + 1 \in K_2[X]$ şi

$$Q_{d_i} = (X^{d_i} + 1) \cdot \left(\prod_{d_j | d_i, d_j \neq d_i} Q_{d_j} \right)^{-1} \in K_2[X]\,,$$

rezultă că toate polinoamele $Q_{d_i} \in K_2[X]$ au toţi coeficienţii 0 sau 1..... **2p**

Dar atunci $P = (X^{kp} + 1) \cdot Q_k^{-1} \in K_2[X]$ are toţi coeficienţii 0 sau 1, dintre care cel puţin p sunt nenuli. Aceasta demonstrează afirmaţia problemei.
.... **1p**