Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Botoşani, 2 aprilie 2025

CLASA a XI-a – soluţii şi bareme

Problema 1. Determinaţi perechile de funcţii $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivabile de ordinul 2, cu derivatele de ordinul 2 continue pe $\mathbb{R}$, având proprietatea

$$(f(x) - g(y)) \cdot (f'(x) - g'(y)) \cdot (f''(x) - g''(y)) = 0,$$

pentru oricare $x, y \in \mathbb{R}$.

Soluţie. Fie (f, g) o pereche de funcţii care satisface cerinţele din enunţ. Arătăm că f'' este o funcţie constantă. Presupunem, prin absurd, că f'' este neconstantă **1p**
Atunci, deoarece $(f(x)-g(0)) \cdot (f'(x)-g'(0)) \cdot (f''(x)-g''(0)) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, iar f'' este continuă, există $a \in \mathbb{R}$ şi $r > 0$ astfel încât $f''(x) \notin \{0, g''(0)\}$, $\forall x \in (a-r, a+r)$. Rezultă $(f(x)-g(0)) \cdot (f'(x)-g'(0)) = 0,\ \forall x \in (a-r, a+r)$.
.... **1p**
Sunt posibile două cazuri.

Cazul 1. Există $b \in (a-r, a+r)$ astfel ca $f'(b) \neq g'(0)$. Pe baza continuităţii lui f', există $s > 0$ astfel ca $(b-s, b+s) \subset (a-r, a+r)$ şi $f'(x) \neq g'(0),\ \forall x \in (b-s, b+s)$. Rezultă $f(x) = g(0),\ \forall x \in (b-s, b+s)$, de unde $f''(x) = 0,\ \forall x \in (b-s, b+s)$. Contradicţie.

Cazul 2. $f'(x) = g'(0),\ \forall x \in (a-r, a+r)$. În acest caz, obţinem $f''(x) = 0,\ \forall x \in (a-r, a+r)$. Contradicţie.

Prin urmare, funcţia f'' este constantă pe $\mathbb{R}$ **2p**
Fie $m \in \mathbb{R}$ astfel ca $f''(x) = 2m,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Din $(f'(x) - 2mx)' = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că există $n \in \mathbb{R}$ astfel ca $f'(x) - 2mx - n = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Din $(f(x) - mx^2 - nx)' = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că există $p \in \mathbb{R}$ astfel ca $f(x) = mx^2 + nx + p,\ \forall x \in \mathbb{R}$. **1p**
Analog, funcţia g'' este constantă pe $\mathbb{R}$, deci există $m', n', p' \in \mathbb{R}$ astfel ca $g(x) = m'x^2 + n'x + p',\ \forall x \in \mathbb{R}$. Dacă $m = m'$, identitatea din enunţ este satisfacută. Dacă $m \neq m'$, identitatea din enunţ nu este satisfăcută deoarece ecuaţia $(f(x) - g(x)) \cdot (f'(x) - g'(x)) = 0$ are cel mult 3 rădăcini reale. În concluzie, perechile de funcţii cu proprietăţile din enunţ sunt de forma $f(x) = mx^2 + nx + p$ şi $g(x) = mx^2 + n'x + p'$, pentru oricare $x \in \mathbb{R}$.
.... **2p**

Problema 2. Fie un număr natural $n \geq 2$ şi două numere complexe a şi b, astfel încât $a \neq 0$ şi $b^k \neq 1$, pentru oricare $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ verifică relaţia $BA = aI_n + bAB$. Arătaţi că matricele A şi B sunt inversabile.

Soluţia 1. Dacă $b = 0$, atunci $BA = aI_n$. Cum $a \neq 0$, matricele A şi B sunt inversabile **1p**
Considerăm $b \neq 0$. Notăm $\sigma(X)$ spectrul matricei $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Fie $\lambda \in \sigma(AB)$. Atunci

$$\det\left(BA - (b\lambda + a)I_n\right) = \det(bAB - b\lambda I_n) = b^n \det(AB - \lambda I_n) = 0.$$

Rezultă că $b\lambda + a \in \sigma(BA)$ **1p**
Are loc relaţia $\sigma(AB) = \sigma(BA)$ **1p**
Prin urmare, dacă $\lambda \in \sigma(AB)$, atunci $b\lambda + a \in \sigma(AB)$ **1p**
Definim funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = bz + a,\ \forall\, z \in \mathbb{C}$. Pentru $k \in \mathbb{N}^*$, notăm $f^{[k]} = \underbrace{f \circ f \circ f \ldots \circ f}_{k \text{ ori}}$. Conform proprietăţii anterioare, dacă $\lambda \in \sigma(AB)$, atunci $f^{[k]}(\lambda) \in \sigma(AB),\ \forall\, k \in \mathbb{N}^*$ (inducţie) **1p**
Presupunem $0 \in \sigma(AB)$. Atunci $f(0), f^{[2]}(0), \ldots, f^{[n+1]}(0) \in \sigma(AB)$.
Cum $\sigma(AB)$ are cel mult n elemente, există $p, q \in \{1, 2, \ldots, n+1\},\ p < q$, astfel ca $f^{[p]}(0) = f^{[q]}(0)$. Deoarece $f^{[k]}(z) = b^k z + a\dfrac{b^k - 1}{b - 1},\ z \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}^*$, obţinem $a\dfrac{b^p - 1}{b - 1} = a\dfrac{b^q - 1}{b - 1}$, de unde $b^{q-p} = 1$, în contradicţie cu ipoteza.
Prin urmare, $0 \notin \sigma(AB)$, deci $\det(A) \cdot \det(B) = \det(AB) \neq 0$, Rezultă că matricele A şi B sunt inversabile **2p**

Soluţia 2. Dacă $b = 0$, atunci $BA = aI_n$. Cum $a \neq 0$, matricele A şi B sunt inversabile **1p**
Dacă $b \neq 0$, fie $f(X) = \det(XI_n - BA)$ polinomul caracteristic al matricei BA. Pentru oricare $t \in \mathbb{C}$, avem:

$$f(t) = \det(tI_n - BA) = \det((t-a)I_n - bAB) = b^n \det\left(\frac{t-a}{b} I_n - AB\right).$$

Matricele AB şi BA au acelaşi polinom caracteristic **1p**
Rezultă relaţia:

(1) $\quad f(t) = b^n f\left(\dfrac{t-a}{b}\right),\ \forall\, t \in \mathbb{C}.$ **1p**

Definim funcţia polinomială $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ g(t) = f\left(t - \dfrac{a}{b-1}\right),\ \forall\, t \in \mathbb{C}.$

Din (1) rezultă ecuaţia polinomială funcţională $g(t) = b^n g\left(\frac{t}{b}\right)$, $\forall\, t \in \mathbb{C}$. Atunci, considerând $g(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \ldots + a_n$, $t \in \mathbb{C}$, obţinem prin identificarea coeficienţilor relaţiile: $a_k = b^k a_k$, pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Din ipoteza $b^k \neq 1$, rezultă $a_k = 0$, $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Prin urmare, avem $g(t) = t^n$, $\forall\, t \in \mathbb{C}$. Deducem $f(t) = \left(t + \frac{a}{b-1}\right)^n$, $\forall\, t \in \mathbb{C}$ **2p**

Conform teoremei Cayley-Hamilton, $f(BA) = O_n$, deci are loc relaţia matriceală $\left(BA + \frac{a}{b-1} I_n\right)^n = O_n$, echivalentă cu $\left(I_n + \frac{b-1}{a} BA\right)^n = O_n$.
....**1p**

Notăm $C = I_n + \frac{b-1}{a} BA$. Cum $C^n = O_n$, obţinem

$$I_n = I_n - C^n = (I_n - C) \sum_{k=0}^{n-1} C^k = \frac{1-b}{a} BA \sum_{k=0}^{n-1} C^k.$$

Rezultă că matricele A şi B sunt inversabile **1p**

Problema 3. Arătaţi că, pentru o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) f este derivabilă, cu derivata continuă pe $\mathbb{R}$;

(ii) pentru oricare $a \in \mathbb{R}$ şi oricare două şiruri $(x_n)_{n \geq 1}$ şi $(y_n)_{n \geq 1}$ convergente la a, astfel încât $x_n \neq y_n$, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$, şirul $\left(\frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n}\right)_{n \geq 1}$ este convergent.

Soluţie.
(i)$\Rightarrow$(ii). Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o functie derivabilă, cu derivata continuă pe $\mathbb{R}$. Considerăm $a \in \mathbb{R}$. Fie şirurile $(x_n)_{n \geq 1}$ şi $(y_n)_{n \geq 1}$, convergente la a, astfel încât $x_n \neq y_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Conform Teoremei lui Lagrange, există un punct $a_n \in (\min\{x_n, y_n\}, \max\{x_n, y_n\})$ astfel ca $\frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = f'(a_n)$. **1p**

Prin criteriul cleştelui, deducem că şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ converge la a. Atunci, pe baza continuităţii lui f', obţinem $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = \lim\limits_{n \to \infty} f'(a_n) = f'(a)$, deci şirul $\left(\frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n}\right)_{n \geq 1}$ este convergent **1p**

(ii)$\Rightarrow$(i). Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o functie cu proprietatea (ii). Pentru $a \in \mathbb{R}$, există $\ell_a = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(a+1/n) - f(a)}{1/n} \in \mathbb{R}$. Considerăm două şiruri $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ convergente la a, astfel încât $x_n \neq y_n$, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$. Definim şirurile $(z_n)_{n\geq 1}$ şi $(t_n)_{n\geq 1}$ prin $z_{2n-1} = x_n$, $z_{2n} = a+1/n$, $t_{2n-1} = y_n$ şi $t_{2n} = a$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} t_n = a$ şi $z_n \neq t_n$, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$. Conform ipotezei, şirul $\left(\dfrac{f(z_n) - f(t_n)}{z_n - t_n}\right)_{n\geq 1}$ este convergent. Deducem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(a+1/n) - f(a)}{1/n} = \ell_a$. În particular, pentru oricare şir $(x_n)_{n\geq 1}$ cu proprietăţile $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ şi $x_n \neq a$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = \ell_a$. Rezultă $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell_a$. Prin urmare, funcţia f este derivabilă pe $\mathbb{R}$, cu $f'(a) = \ell_a$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$ **2p**
Presupunem, prin absurd, că f' este discontinuă într-un punct $a \in \mathbb{R}$. Atunci există $\varepsilon > 0$ şi un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ convergent la a, cu $a_n \neq a$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $|f'(a) - f'(a_n)| > \varepsilon$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Cum f este derivabilă în a_n, putem alege $x_n \in (a_n, a_n + 1/n)$ astfel încât $\left|f'(a_n) - \dfrac{f(x_n) - f(a_n)}{x_n - a_n}\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ converge la a (criteriul cleştelui), $x_n \neq a_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, dar $\left|f'(a) - \dfrac{f(x_n) - f(a_n)}{x_n - a_n}\right| \geq |f'(a) - f'(a_n)| - \left|f'(a_n) - \dfrac{f(x_n) - f(a_n)}{x_n - a_n}\right| > \dfrac{\varepsilon}{2}$, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$, în contradicţie cu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n) - f(a_n)}{x_n - a_n} = f'(a)$.

În concluzie, f' este continuă pe $\mathbb{R}$ **3p**

Problema 4. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A + B = AB + BA$.
Arătaţi că:
a) dacă n este impar, atunci $\det(AB - BA) = 0$;
b) dacă $\operatorname{tr}(A) \neq \operatorname{tr}(B)$, atunci $\det(AB - BA) = 0$.

Soluţie.

a) Definim matricele $C = 2A - I_n$ şi $D = 2B - I_n$. Pe baza ipotezei, obţinem $CD - I_n = -(DC - I_n) = 2(AB - BA)$.......................**2p**
Cum n este impar, avem $\det(CD - I_n) = -\det(DC - I_n)$ **1p**
Din proprietatea cunoscută $\det(XY - I_n) = \det(YX - I_n)$, $\forall\ X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, rezultă $\det(CD - I_n) = -\det(CD - I_n)$, de unde obţinem $\det(CD - I_n) = 0$. Prin urmare, $\det(AB - BA) = 0$.......................................**1p**

b) Notăm $E = AB - BA$. Presupunem, prin absurd, $\det(E) \neq 0$. Avem

$$AE+EA = A^2B-BA^2 = A(A+B-BA)-(A+B-AB)A = AB-BA = E.$$

....**1p**

Cum E este presupusă inversabilă, obţinem $E^{-1}AE + A = I_n$. Atunci, pe baza proprietăţii $\operatorname{tr}(E^{-1}AE) = \operatorname{tr}(A)$, rezultă $\operatorname{tr}(A) = \frac{n}{2}$. Cum relaţia din enunţ este simetrică, avem de asemenea $\operatorname{tr}(B) = \frac{n}{2}$. Astfel, $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$, în contradicţie cu ipoteza b). Rezultă $\det(AB - BA) = 0$ **2p**