# Olimpiada Naţională de Matematică
# Etapa Naţională, Botoşani, 2 aprilie 2025

## CLASA a X-a – soluţii şi bareme

**Problema 1.** Se consideră un triunghi $ABC$ şi un punct $M$ în planul său diferit de $A, B$ şi $C$. Notăm cu $N$, $P$ şi $Q$ simetricele punctului $M$ faţă de laturile $AB$, $BC$, respectiv $AC$.

a) Demonstraţi că punctele $N$, $P$ şi $Q$ sunt coliniare dacă şi numai dacă punctul $M$ aparţine cercului circumscris triunghiului $ABC$.

b) Dacă punctul $M$ nu aparţine cercului circumscris triunghiului $ABC$ iar triunghiurile $ABC$ şi $NPQ$ au acelaşi centru de greutate, arătaţi că triunghiul $ABC$ este echilateral.

*Soluţie.* Raportăm planul la un un reper cartezian şi notăm cu literă mică afixul unui punct notat, corespunzător, cu litera mare.

Mijlocul $S$ al segmentului $MN$ aparţine dreptei $AB$, prin urmare $\dfrac{s-a}{b-a} \in \mathbb{R}$. Dreptele $MN$ şi $AB$ sunt perpendiculare, aşadar $\dfrac{n-m}{b-a} \in i\mathbb{R}$.

Presupunem, fără a restrânge generalitatea, că originea reperului este în centrul cercului circumscris triunghiului, iar $|a| = |b| = |c| = 1$. Atunci $\overline{a} = \dfrac{1}{a}$, $\overline{b} = \dfrac{1}{b}$, $\overline{c} = \dfrac{1}{c}$ şi, cum $s = \dfrac{m+n}{2}$, avem:

$$\frac{s-a}{b-a} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{s-a}{b-a} = \frac{\overline{s}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}} \Leftrightarrow n+m = 2(a+b) - ab\left(\overline{n}+\overline{m}\right),$$

respectiv

$$\frac{n-m}{b-a} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{n-m}{b-a} = -\frac{\overline{n}-\overline{m}}{\overline{b}-\overline{a}} \Leftrightarrow n-m = ab\left(\overline{n}-\overline{m}\right).$$

Adunând cele două relaţii, rezultă că $n = a+b-ab\overline{m}$. Analog se arată că $p = b+c-bc\overline{m}$, iar $q = c+a-ca\overline{m}$. .............................. **3p**

a) Punctele $N$, $P$ şi $Q$ sunt coliniare dacă şi numai dacă

$$\frac{n-p}{q-p} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{n-p}{q-p} = \frac{\overline{n}-\overline{p}}{\overline{q}-\overline{p}} \Leftrightarrow \frac{(a-c)\left(1-b\overline{m}\right)}{(a-b)\left(1-c\overline{m}\right)} = \frac{\left(\overline{a}-\overline{c}\right)\left(1-\overline{b}m\right)}{\left(\overline{a}-\overline{b}\right)\left(1-\overline{c}m\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-b\overline{m}}{1-c\overline{m}} = \frac{b}{c}\cdot\frac{1-\overline{b}m}{1-\overline{c}m} \Leftrightarrow \frac{1-b\overline{m}}{1-c\overline{m}} = \frac{b-m}{c-m} \Leftrightarrow c-b = |m|^2(c-b) \Leftrightarrow |m| = 1,$$

deci dacă şi numai dacă punctul $M$ aparţine cercului circumscris triunghiului $ABC$. .......................................................... **2p**

b) Cum triunghiurile $ABC$ şi $NPQ$ au acelaşi centru de greutate, înseamnă că $\frac{a+b+c}{3} = \frac{n+p+q}{3} \Leftrightarrow a+b+c = \overline{m}\left(ab+bc+ca\right) \Leftrightarrow a+b+c = \overline{m}abc\left(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}\right)$.

Trecând la module, deducem că $|a+b+c| = |m| \cdot |a+b+c|$. Punctul $M$ nu este situat pe cercul circumscris triunghiului, prin urmare $|m| \neq 1$; rezultă că $|a+b+c| = 0$. Atunci centrul de greutate al triunghiului $ABC$ coincide cu centrul cercului circumscris acestuia, deci triunghiul $ABC$ este echilateral. .......................................................... **2p**

**Problema 2.** Fie $n$ un număr natural nenul dat. Pentru o mulţime finită de puncte din plan $M$, spunem că punctele distincte $A, B \in M$ sunt *conectate* dacă dreapta $AB$ conţine exact $n+1$ puncte din $M$.

Determinaţi valoarea minimă a numărului natural nenul $m$ pentru care există o mulţime $M$ de $m$ puncte din plan cu proprietatea că orice punct $A \in M$ este conectat cu exact $2n$ alte puncte din $M$.

*Soluţia 1.*

Fie $M = \{A_1, A_2, ...., A_m\}$ o mulţime de $m$ puncte cu proprietatea din enunţ şi $A_1 \in M$. Cum $A_1$ este conectat cu alte puncte, există o dreaptă $d_0$ care conţine exact alte $n$ puncte $A_2, ..., A_{n+1}$ din mulţimea $M$. Cum fiecare din punctele $A_1, A_2, ...A_{n+1}$ este deja conectat cu $n$ puncte diferite de el, deducem că prin fiecare $A_i$ mai trece exact o dreaptă $d_i$ care conţine celelalte $2n - n = n$ puncte din $M$ conectate cu $A_i$. ............................ **2p**

Astfel, $d_0$ conţine $n+1$ puncte din $M$, $d_1$ conţine $n$ puncte noi din $M$ (celelalte în afară de $A_1$), $d_2$ conţine cel puţin alte $n-1$ puncte din $M$ (celelalte în afară de $A_2$ şi, eventual, intersecţia lui $d_2$ cu $d_1$) etc. În general, dreapta $d_k$ conţine cel puţin alte $n+1-k$ puncte din $M$ (celelalte în afară de $A_k$ şi, eventual, intersecţiile lui $d_k$ cu $d_1,\ d_2, ..., d_{k-1}$).

Aşadar $m \geq (n+1) + n + (n-1) + ... + 2 + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$..... **3p**

Pentru a arăta că $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ este minimul căutat, considerăm o configuraţie de $n+2$ drepte în poziţie generală (adică oricare două se intersectează şi nu există trei drepte concurente) şi $M$ mulţimea celor $\mathbf{C}_{n+2}^2$ puncte de intersecţie a acestora. Fiecare dreaptă va conţine atunci câte $n+1$

puncte din $M$ şi, cum fiecare punct din $M$ va fi situat pe două dintre aceste drepte, el va fi conectat cu exact $2 \cdot (n+1-1) = 2n$ puncte. .......... **2p**

*Soluţia 2.*

Fie $M = \{A_1, A_2, ...., A_m\}$ o mulţime de $m$ puncte cu proprietatea din enunţ, $\mathcal{D}_M = \{A_iA_j \mid 1 \leq i < j \leq m\}$ şi $\mathcal{D} = \{a \in \mathcal{D}_M \mid |a \cap M| = n+1\}$.

Notăm cu $d = |\mathcal{D}|$ şi cu $I = \{d_1 \cap d_2 \mid d_1, d_2 \in \mathcal{D}, d_1 \neq d_2\}$.

Dacă punctele $A, B \in M$ sunt conectate, atunci $A$ este conectat cu oricare din celelalte $n$ puncte din $M \setminus \{A\}$ care se află pe dreapta $AB$. Deoarece orice punct $A \in M$ este conectat cu exact $2n$ alte puncte din $M$, atunci $A$ se află la intersecţia a exact două drepte din $\mathcal{D}$, şi astfel $m = \dfrac{d(n+1)}{2}$. ........ **2p**

Deducem că $M \subseteq I$ şi numărul punctelor din $I$ este cel mult egal cu numărul de perechi de câte două drepte din $\mathcal{D}$, deci $|I| \leq \mathbf{C}_d^2 = \dfrac{d(d-1)}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2m(2m-n-1)}{(n+1)^2}$.

Rezultă că $m \leq |I| \leq \dfrac{m(2m-n-1)}{(n+1)^2}$, de unde $m \geq \dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$.
............................................................ **3p**

Pentru a arăta că $\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$ este minimul căutat, considerăm o configuraţie de $n+2$ drepte în poziţie generală (adică oricare două se intersectează şi nu există trei drepte concurente) şi $M$ mulţimea celor $\mathbf{C}_{n+2}^2$ puncte de intersecţie a acestora. Fiecare dreaptă va conţine atunci câte $n+1$ puncte din $M$ şi, cum fiecare punct din $M$ va fi situat pe două dintre aceste drepte, el va fi conectat cu exact $2 \cdot (n+1-1) = 2n$ puncte. .......... **2p**

**Problema 3.** Pentru un număr natural nenul $k$, considerăm funcţia $g_k : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ g_k(x) = x^k$.

Determinaţi mulţimea $M_k$ a numerelor naturale nenule $n$ cu proprietatea că există funcţii injective $f_1, f_2, ..., f_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ astfel încât $g_k = f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_n$.

*Soluţie.* Observăm mai întâi că $x^k = \underbrace{x \cdot x \cdot ... \cdot x}_{\text{de } k \text{ ori } x}$, deci $k \in M_k$.

Fie $n \in M_k$, adică există funcţii injective $f_1, f_2, ..., f_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ astfel încât, pentru orice $x \in \mathbb{Z}$, avem $g_k(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot ... \cdot f_n(x)$, **(1)**. Luând $x = 1$, apoi $x = -1$ în relaţia **(1)**, obţinem $1 = f_1(1) \cdot f_2(1) \cdot ... \cdot f_n(1)$, **(2)**, respectiv $(-1)^k = f_1(-1) \cdot f_2(-1) \cdot ... \cdot f_n(-1)$, **(3)**. Deoarece $f_i(1)$ şi $f_i(-1)$ sunt numere întregi, iar funcţiile $f_i$ sunt injective, rezultă că $\{f_i(1),\ f_i(-1)\} = \{1, -1\}$ pentru orice $i = \overline{1, n}$,**(4)**. ........................................ **2p**

Din **(1)**, pentru $x=2$, obţinem $2^k = |f_1(2)|\cdot|f_2(2)|\cdot...\cdot|f_n(2)|$. Folosind injectivitatea şi **(4)** deducem $|f_i(2)|\geq 2$ pentru orice $i=\overline{1,n}$. Astfel, $2^k = |f_1(2)|\cdot|f_2(2)|\cdot...\cdot|f_n(2)|\geq 2^n$, deci $k\geq n$. Aşadar $M_k\subset\{1,2,...,k\}$.

Din **(4)** şi înmulţirea egalităţilor **(2)** şi **(3)** deducem $(-1)^k=(-1)^n$, deci $n$ şi $k$ au aceeaşi paritate, adică $M_k\subset\{k,k-2,k-4,...\}\subset\mathbb{N}^*$.

................................................................ **3p**

Vom arăta că toate valorile de forma $n=k-2t$ convin. Pentru aceasta, observăm că $x^k = \underbrace{x\cdot x\cdot...\cdot x}_{\text{de } k-2t-1 \text{ ori } x}\cdot x^{2t+1}$, deci $f_i(x)=x$ pentru orice $i=\overline{1,n-1}$, $f_n(x)=x^{2t+1}$ sunt injective şi $x^n = f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot...\cdot f_{n-1(}x)\cdot f_n(x)$.

În concluzie $k-2t\in M_k$ pentru orice $t\in\mathbb{N}$ cu $2t<k$, deci mulţimea căutată este $M_k=\{k,k-2,\ k-4,...,k-2\cdot\left[\frac{k-1}{2}\right]\}$. ................ **2p**

**Problema 4.** Determinaţi numerele complexe $z$ şi $w$ care au proprietatea că

$$\left|z^{2n}+z^nw^n+w^{2n}\right| = 2^{2n}+2^n+1,$$

oricare ar fi numărul natural nenul $n$.

*Soluţie.* Trecând la modul în ambii membri ai identităţii

$$\left(z^2+zw+w^2\right)\left(z^2-zw+w^2\right) = z^4+z^2w^2+w^4$$

şi ţinând cont de ipoteza problemei, obţinem că $|z^2-zw+w^2| = \frac{21}{7} = 3$.

Analog, trecând la modul în ambii membri ai identităţii

$$\left(z^4+z^2w^2+w^4\right)\left(z^4-z^2w^2+w^4\right) = z^8+z^4w^4+w^8$$

şi ţinând cont de ipoteza problemei, obţinem că $|z^4-z^2w^2+w^4| = \frac{273}{21} = 13$.

Trecând la modul în ambii membri ai identităţii

$$\frac{1}{2}\left(z^2+zw+w^2\right)^2+\frac{1}{2}\left(z^2-zw+w^2\right)^2+\left(z^4-z^2w^2+w^4\right) = 2\left(z^4+z^2w^2+w^4\right),$$

aplicând inegalitatea modulului şi ţinând seama de cele de mai sus, obţinem că $\frac{1}{2}\cdot 49+\frac{1}{2}\cdot 9+13\geq 2\cdot 21$. ........................................ **3p**

Observăm că se realizează egalitatea, prin urmare există un număr real $t$ astfel încât $(z^2 + zw + w^2)^2 = t^2 \left(z^2 - zw + w^2\right)^2$. Trecând la module, găsim $t = \pm\dfrac{7}{3}$, prin urmare $3\left(z^2 + zw + w^2\right) = \pm 7\left(z^2 - zw + w^2\right)$.

Pentru $t = \dfrac{7}{3}$ găsim $2z^2 - 5zw + 2w^2 = 0 \Leftrightarrow (2z - w)(z - 2w) = 0$.

Deducem că $w = 2z$ sau $z = 2w$. Înlocuind în $|z^2 + zw + w^2| = 7$, în primul caz obţinem că $|z| = 1$, iar în cel de-al doilea că $|w| = 1$.

În cazul $t = -\dfrac{7}{3}$ găsim $5z^2 - 2zw + 5w^2 = 0 \Leftrightarrow (\varphi z - w)(z - \varphi w) = 0$, unde $\varphi = \dfrac{1 + 2\sqrt{6}i}{5}$, $5\varphi^2 - 2\varphi + 5 = 0$, $|\varphi| = 1$.

Deducem că $w = \varphi z$ sau $z = \varphi w$. Înlocuind în $|z^2 + zw + w^2| = 7$, în primul caz obţinem că $|z| = \sqrt{5}$, iar în cel de-al doilea că $|w| = \sqrt{5}$.

Niciuna din aceste variante nu convine deoarece se contrazice egalitatea $|z^4 - z^2w^2 + w^4| = 13$.

.................................................................. **3p**

Se verifică uşor că toate perechile de forma $(z, 2z)$ şi $(2z, z)$, unde $z$ este un număr complex de modul 1, au proprietatea din enunţ. ............. **1p**