Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Botoşani, 2 aprilie 2025

CLASA a IX-a – soluţii şi bareme

Problema 1. Fie $N \geq 1$ un număr natural. Pe o tablă sunt scrise iniţial două zerouri, unul cu roşu şi unul cu albastru. Definim următorul procedeu: la fiecare pas, se alege un număr natural k (nu neapărat distinct faţă de valorile alese anterior) şi, dacă x este numărul scris cu albastru şi y este cel scris cu roşu, le vom înlocui cu $x+k+1$ şi, respectiv cu $y+k^2+2$, apoi colorăm $x+k+1$ cu albastru şi $y+k^2+2$ cu roşu. Acest procedeu continuă până când numărul albastru este cel puţin N. Determinaţi valoarea minimă pe care o poate avea numărul roşu la finalul procedeului.

Soluţie.

Fie M_k mutarea care măreşte numărul albastru cu $k+1$ şi numărul roşu cu k^2+2. Demonstrăm că mutarea M_k, $k \geq 2$, se poate înlocui cu mutări M_0 şi M_1 astfel încât numărul albastru să crească tot cu $k+1$, dar numărul roşu să crească cu mai puţin de k^2+2.

....**1punct**

Pentru cazul $k = 2p+1$, observăm că M_k se poate înlocui cu $p+1$ mutări M_1. Mutarea M_k va creşte numărul albastru cu $2p+2$, iar numărul roşu cu $(2p+1)^2+2$, în timp ce $p+1$ mutări M_1 vor creşte numărul albastru tot cu $2p+2$, dar numărul roşu va creşte doar cu $3(p+1)$. Cum $(2p+1)^2+2 > 3(p+1)$, pentru orice $p \geq 1$, atunci mutarea M_{2p+1} se poate înlocui cu $p+1$ mutări M_1.

Pentru cazul $k = 2p$, avem că mutarea M_k se poate înlocui cu p mutări M_1 şi o mutare M_0. În felul acesta, mutarea M_k va creşte numărul albastru cu $2p+1$, dar numărul roşu va creşte cu $(2p)^2+2$. Pe de altă parte, folosind p mutări M_1 şi o mutare M_0, numărul albastru creşte tot cu $2p+1$, dar numărul roşu creşte cu $3p+2$. Deoarece $3p+2 < (2p)^2+2$, pentru orice $p \geq 1$, atunci mutarea M_{2p} se poate înlocui cu p mutări M_1 şi o mutare M_0.

....**3puncte**

În plus, observăm că două mutări M_0 se pot înlocui cu o mutare M_1, iar numărul roşu va creşte doar cu 3, în loc să crească cu 4.

....**1punct**

Aşadar, strategiile de înlocuire de mai sus sunt optime pentru a minimiza numărul roşu. Dacă N este par, atunci numărul roşu este cel puţin $\frac{3N}{2}$, iar dacă N este impar, atunci numărul roşu este cel puţin $3\left[\frac{N}{2}\right]+2$. Deci, valoarea minimă a numărului roşu este $N+\left[\frac{N+1}{2}\right]$. **2puncte**

Problema 2. Fie triunghiul ABC ascuţitunghic, înscris în cercul de centru O şi rază R, cu ortocentrul în punctul H. Fie A_1 un punct pe latura BC a triunghiului, astfel încât $HA_1+A_1O=R$. În mod analog considerăm B_1, C_1 pe laturile AC, respectiv AB. Dacă are loc relaţia $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$, arătaţi că triunghiul ABC este echilateral.

Soluţie.

Fie H_A simetricul lui H faţă de BC. Acest punct se află pe cercul circumscris triunghiului ABC. Atunci $A_1H_A=A_1H$, de unde $A_1O+A_1H_A=R=OH_A$, adică A_1 este intersecţia lui OH_A cu BC, deci este unicul punct de pe BC cu proprietatea dată. **1punct**

Demonstrăm că $\angle BHA_1=\angle B$ şi $\angle CHA_1=\angle C$. Presupunem că $\angle B\le\angle C$. Fie A_O punctul diametral opus al punctului A. De aici avem succesiv:

$$\begin{aligned}\angle BHA_1 &= \angle BHH_A-\angle A_1HH_A=\angle C-\angle OH_AA=\\ &=\angle C-\angle A_OAH_A=\angle C-(\angle A-\angle BAA_O-\angle H_AAC)=\\ &=\angle C-(\angle A-(90^\circ-\angle C)-\angle BCA_O)=\\ &=\angle C-(\angle A-(90^\circ-\angle C)-(90^\circ-\angle C))=\angle B.\end{aligned}$$

.... **2puncte**

De aici obţinem că $\angle CHA_1=\angle C$. Apoi avem:

$$\frac{BA_1}{CA_1}=\frac{\mathcal{A}_{BHA_1}}{\mathcal{A}_{CHA_1}}=\frac{BH\cdot HA_1\cdot\sin(\angle BHA_1)}{CH\cdot HA_1\cdot\sin(\angle CHA_1)}=\frac{2R\cos B\sin B}{2R\cos C\sin C}=\frac{\sin(2B)}{\sin(2C)}.$$

.... **1punct**

În mod similar deducem rapoartele $\frac{CB_1}{AB_1}$ şi $\frac{AC_1}{BC_1}$, de unde rezultă că AA_1, BB_1 şi CC_1 sunt concurente. Dar, cum $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$, avem că AA_1, BB_1 şi CC_1 sunt mediane. **2puncte**

De aici $\sin(2A)=\sin(2B)=\sin(2C)$, iar cum triunghiul este ascuţitunghic, avem $\angle A=\angle B=\angle C$, adică triunghiul ABC este echilateral. **1punct**

Problema 3. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$. Se consideră ecuaţia:

$$\{x\}+\{2x\}+\cdots+\{nx\}=[x]+[2x]+\cdots+[2nx].$$

a) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia pentru $n = 2$.
b) Demonstraţi că ecuaţia are maxim două soluţii reale, oricare ar fi $n \geq 2$.

Soluţie. Deoarece $\{kx\} \in [0, 1)$, obţinem că şi membru drept este nenegativ, deci $x \geq 0$. **1punct**

a) Pentru $n = 2$ ecuaţia din enunţ devine:

$$\{x\} + \{2x\} = [x] + [2x] + [3x] + [4x] \in [0, 2) \cap \mathbb{Z} = \{0, 1\}.$$

Dacă $\{x\} + \{2x\} = 0$, obţinem $\{x\} = \{2x\} = 0$, adică $x \in \mathbb{Z}$, de unde avem $10x = 0$, adică $x = 0$, care verifică ecuaţia dată.

Dacă $\{x\} + \{2x\} = 1$, deoarece $[x] \leq [2x] \leq [3x] \leq [4x]$, obţinem că $[x] = [2x] = [3x] = 0$ şi $[4x] = 1$, adică $3x < 1 \leq 4x$, de unde avem $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$. Dar, din $[x] = [2x] = 0$ şi $\{x\} + \{2x\} = 1$, obţinem că $x + 2x = 1$, adică $x = \frac{1}{3} \notin \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$. Aşadar, pentru $n = 2$ unica soluţie este $x = 0$. ... **2puncte**

b) Analog cu raţionamentul de la *a*), avem $\{x\} + \cdots + \{nx\} \in [0, n) \cap \mathbb{Z}$ şi $[x] \leq [2x] \leq \cdots \leq [2nx]$. Dacă $[nx] \geq 1$, atunci membrul drept ar fi $\geq n + 1$, ceea ce este o contradiţie. Aşadar, $[x] = \cdots = [nx] = 0$, deci ecuaţia din enunţ devine:

$$x + 2x + \cdots + nx = [(n + 1)x] + \cdots + [2nx] = k \in \{0, 1, \dots, n - 1\}.$$

.... **2puncte**

De aici obţinem că eventualele soluţii sunt de forma $x = \frac{2k}{n(n+1)}$, cu $k \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$. Pentru $k = 0$ avem soluţia $x = 0$ pentru orice $n \geq 2$.

Pentru $k > 0$, din $nx < 1$, obţinem că $2nx < 2$, deci avem $[2nx] = [(2n - 1)x] = \cdots = [(2n - k + 1)x] = 1$ şi $[(2n - k)x] = \cdots = [(n + 1)x] = 0$, ceea ce implică

$$(2n - k)\frac{2k}{n(n + 1)} < 1 \leq (2n - k + 1)\frac{2k}{n(n + 1)},$$

adică:

$$n - \sqrt{\frac{n(n - 1)}{2}} > k \geq n + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{2n^2 + 2n + 1}{4}},$$

iar cum $n - \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} - \left(n + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{2n^2+2n+1}{4}}\right) < 1$, avem cel mult încă o valoare posibilă a lui k, adică cel mult încă o soluţie. **2puncte**

Problema 4. Fie $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ un număr natural fixat şi $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale nenegative astfel încât $a_{n+1} \leq a_n - a_{mn}$, $(\forall)$ $n \geq 1$.

a) Demonstraţi că şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ cu $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ este mărginit superior.

b) Demonstraţi că şirul $(c_n)_{n\geq 1}$ cu $c_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 a_k$ este mărginit superior.

Soluţie.

a) Observăm că $(b_n)_{n\geq 1}$ este crescător. De asemenea, şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător, deoarece $0 \leq a_{mn} \leq a_n - a_{n+1}$. În plus:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{mk} \leq a_1 - a_{n+1} \leq a_1.$$

.... **1 punct**

De asemenea, folosind monotonia lui $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$, avem:

$$\begin{aligned} b_n \leq b_{mn} = \sum_{k=1}^{mn} a_k = \sum_{i=1}^{m-1} a_i + \sum_{k=1}^{n} a_{mk} + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1} a_{mk+j} \leq \\ \leq \sum_{i=1}^{m-1} a_i + \sum_{k=1}^{n} a_{mk} + (m-1)\sum_{k=1}^{n-1} a_{mk} \leq \sum_{i=1}^{m-1} a_i + m a_1, \end{aligned}$$

deci şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este mărginit superior. .... **2 puncte**

b) Demonstrăm mai întâi că şirul $d_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k$ este mărginit superior. Evident, şirul $(d_n)_{n\geq 1}$ este crescător. Mai întâi avem:

$$\sum_{k=1}^{n} k a_{mk} \leq \sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1}) = a_1 + \sum_{k=2}^{n}(k-(k-1))a_k - n a_{n+1} \leq b_n,$$

deci şirul $\left(\sum_{k=1}^{n} ka_{mk}\right)_{n\geq 1}$ este mărginit superior. Pe de altă parte, avem:

$$\begin{aligned} d_n \leq d_{mn} &= m\sum_{k=1}^{n} ka_{mk} + \sum_{k=1}^{m-1} ka_k + \sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n-1}(mk+j)a_{mk+j} \leq \\ &\leq mb_n + d_{m-1} + (m-1)\sum_{k=1}^{n-1} m(k+1)a_{mk} \leq \\ &\leq mb_n + d_{m-1} + m(m-1)(b_{n-1}+a_1), \end{aligned}$$

adică şirul $(d_n)_{n\geq 1}$ este mărginit superior. **2puncte**

Din nou, şirul $(c_n)_{n\geq 1}$ este crescător. În mod similar, avem:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^2 a_{mk} &\leq \sum_{k=1}^{n} k^2(a_k - a_{k+1}) = a_1 + \sum_{k=2}^{n}(k^2-(k-1)^2)a_k - n^2 a_{n+1} \leq \\ &\leq a_1 + \sum_{k=2}^{n} 2ka_k \leq 2d_n, \end{aligned}$$

adică şirul $\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 a_{mk}\right)_{n\geq 1}$ este mărginit superior. Apoi din nou avem:

$$\begin{aligned} c_n \leq c_{mn} &= m^2\sum_{k=1}^{n} k^2 a_{mk} + c_{m-1} + \sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n-1}(mk+j)^2 a_{mk+j} \leq \\ &\leq 2m^2 d_n + c_{m-1} + m^2(m-1)\left(\sum_{k=1}^{n-1} k^2 a_{mk} + 2\sum_{k=1}^{n-1} ka_{mk} + \sum_{k=1}^{n-1} a_{mk}\right), \end{aligned}$$

care este o sumă finită de şiruri mărginite superior, deci $(c_n)_{n\geq 1}$ este mărginit superior. **2puncte**